Introducción a la Econometría

Andrés Felipe Suárez G.

January 15, 2019

Tabla de Contenido I

Tabla de Contenido II

Tabla de Contenido III

Tabla de Contenido IV

Tabla de Contenido V

Tabla de Contenido VI

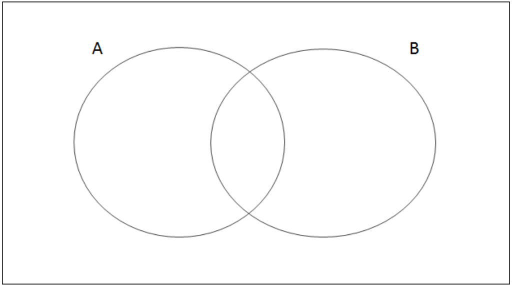


Figure: Elaboración propia

Definición

"Un conjunto es una lista, colección o clase de objetos bien definidos, objetos que, como se verá en los ejemplos, pueden ser cualesquiera: números, personas,, letras, rios, etc. Estos objetos se llaman elementos o miembros del conjunto". (Lipschutz, pág. 8)

Notación

Es usual denotar los conjuntos por letras mayúsculas, A, B, C, D, etcétera.

Por su parte, los elementos de los conjuntos se representan por letras minúsculas, a, b, c, d, entre otras.

A manera de ejemplo, se podría decir que el conjunto A está compuesto por los elementos: a, b, c, d, e, f y g. En notación matemática, este conjunto se definiría como:

$$A = \{a, b, c, d, e, f, g\}$$

Notación

También es posible enunciar los elementos del conjunto A a través de las propiedades de sus elementos, a manera de ejemplo:

$$A = \{x | x \text{ es una letra de la } a \text{ a la } g\}$$

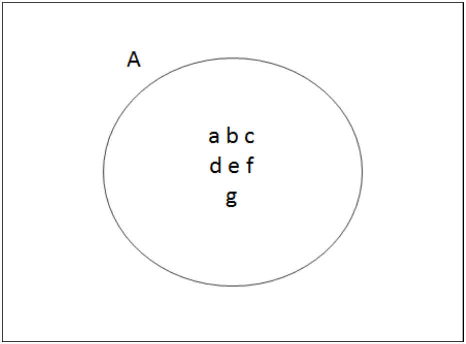


Figure: Elementos del Conjunto A

Definición

"Los conjuntos pueden ser finitos o infinitos. Intuitivamente, un conjunto es finito si consta de un cierto número de elementos distintos, es decir, si al contar los diferentes elementos del conjunto el proceso de contar puede acabar. Si no, el conjunto es infinito".(Lipschutz, pág. 9)

- Un ejemplo de un conjunto finito es el sexo de las personas, las carreras que ofrece la Javeriana, los equipos de fútbol profesional en Colombia, las ciudades capitales en Colombia, etc.
- Un ejemplo de un conjunto infinito es la cantidad de números reales que se encuentran entre 0 y 1, la cantidad de números enteros, etcétera.

Definición

El conjunto *A es igual al conjunto B* si ambos tiene los mismos elementos, es decir, si cada elemento que pertenece a A pertenece a B y si cada elemento que pertenece a B pertenece también a A. Se denota la igualdad de los conjuntos A y B por:

$$A = B$$

(Lipschutz, pág. 9)

Definición

Si todo elemento de un conjunto A es también un elemento de un conjunto B, entonces se dice que A es un subconjunto de B. Más claro: A es un subconjunto de B si $x \varepsilon A$ implica $x \varepsilon B$. Se denota esta relación escribiendo

$$A \subset B$$

que también se puede leer « A está contenido en B».

(Lipschutz, pág. 10)

Definición

Se dirá que B es un subconjunto propio de A si, en primer lugar, B es un subconjunto de A y, en segundo lugar, B no es igual a A. Más brevemente, B es un subconjunto propio de A si

$$B \subset A \text{ y } B \neq A$$

(Lipschutz, pág. 10)

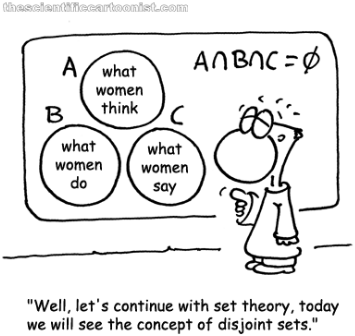


Figure: http://www.thescientificcartoonist.com

Definición

"Si dos conjuntos A y B no tienen elementos comunes, es decir, si ningún elemento de A está en B y si ningún elemento de B está en A, se dice que A y B son disjuntos".

(Lipschutz, pág. 12) contenidos...

Definición

"Diagrama consistente en dos o más áreas circulares que representan sendos conjuntos (totalidad de elementos que tienen una característica común) que se interseccionan y que comparten los subconjuntos representados por las áreas comunes". (https://es.oxforddictionaries.com/)

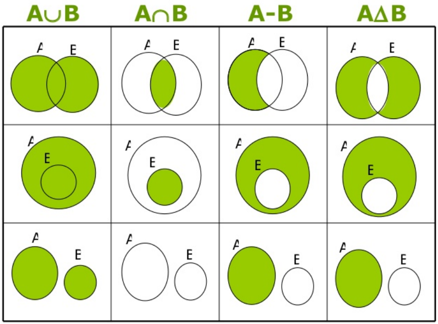


Figure: https://www.slideshare.net/patrizzio5/operaciones-entre-conjuntos-7646415

Definición

La unión de los conjuntos A y B es el conjunto de todos los elementos que pertenecen a A o a B o a ambos. Se denota la unión de A y B por

$$A \cup B$$

(Lipschutz, pág. 24)

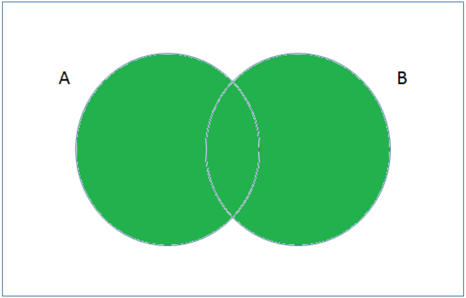


Figure: Elaboración propia

Definición

La intersección de los conjuntos A y B es el conjunto de los elementos que son comunes a A y B, esto es, de aquellos que pertenecen a A y que también pertenecen a B. Se denota la intersección de A y B por

$$A \cap B$$

(Lipschutz, pág. 25)

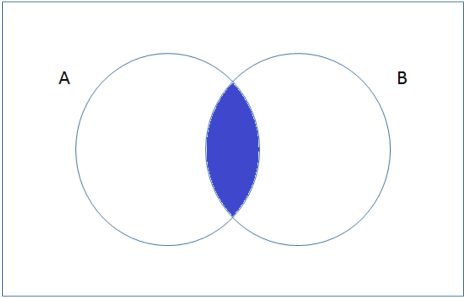


Figure: Elaboración propia

Definición

La diferencia de los conjuntos A y B es el conjunto de elementos que pertenecen a A, pero no a B. Se denota la diferencia de A y B por

$$A - B$$

(Lipschutz, pág. 25)

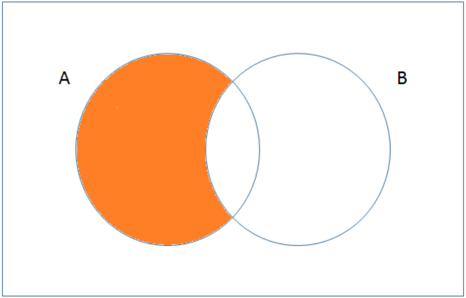


Figure: Elaboración propia

Definición

El complemento de un conjunto A es el conjunto de elementos que no pertenecen a A, es decir, la diferencia el conjunto universal U y del A. Se denota el complemento de A por

$$A^{'}$$

(Lipschutz, pág. 26)

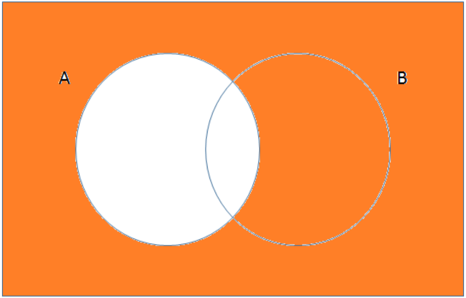


Figure: Elaboración propia

- Si $A \subset B$, luego $A \cup B = B$
- Si $A \subset B$ y $B \subset A$ luego $A = B$
- Si $A \subset B$, luego y $A \cap B = A$
- Si A y B son conjuntos mutuamente excluyentes, no tendrán eventos en común.
- Si A y B son conjuntos complementarios, su unión es igual al espacio muestral S.

- Sea $A = 1, 2, 3, 4$, $B = 2, 4, 6, 8$ y $C = 3, 4, 5, 6$. Hallar $(a) A \cup B$, $(b) A \cup C$, $(c) B \cup C$, $(d) B \cup B$.
- Sean A, B, y C los conjuntos del problema anterior. Hallar $(1)(A \cup B) \cup C$, $(2) A \cup (B \cup C)$
- Sean $A = 1, 2, 3, 4$, $B = 2, 4, 6, 8$ y $C = 3, 4, 5, 6$. Hallar $(a)(A \cap B) \cap C$, (b)$A \cap (B \cap C)$.
- Sea el conjunto universal $U = a, b, c, d, ef, g$ y sean $A = a, b, c, d, e$, $B = a, c, e, g$ y $C = b, e, f, g$. Hallar
  - $A \cup C$
  - $B \cap A$
  - $C - B$
  - B'
  - $A' - B$
  - $B' - C$
  - $(A - C)'$
  - $C' \cup A$

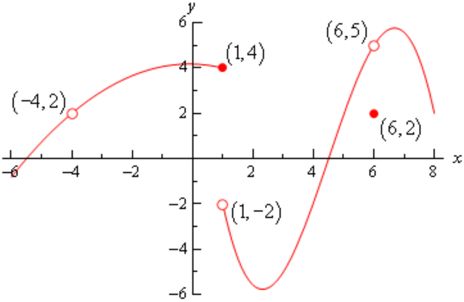


Figure: http://tutorial.math.lamar.edu

Definición

Escriba

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

que se expresa como: "el límite de $f(x)$ cuando x tiende a a, es igual a L".

Si podemos acercar arbitrariamente los valores de $f(x)$ a L (tanto como se desee) escogiendo una x lo bastante cerca de a, pero no igual a a.

En términos generales, esto afirma que los valores de $f(x)$ se aproximan cada vez más al número L cuando x se acerca a a (desde cualquiera de los dos lados de a) pero $\neq a$.

Advierda la frase "pero $x \neq a$" en la definición del límite. Esto significa que al hallar el límite de $f(x)$ cuando x tiende a a, nunca considero $x = a$. De hecho, incluso no es necesario que $f(x)$ esté definida cuando $x = a$. Lo único que importa es cómo está definida f cerca de a.

(Stewart, pág. 88)

Ejemplo

Halle el límite de la función $f(x) = 5x - 4$ cuando x tiende a 2.

Respuesta/ El límite de la función $f(x) = 5x - 4$ cuando x tiende a 2 es igual a 6.

Límite Inferior		Límite Superior	
Dominio (x)	Rango (Y)	Dominio (x)	Rango (Y)
1.9	5.5	2.01	6.05
1.91	5.55	2.02	6.1
1.92	5.6	2.03	6.15
1.93	5.65	2.04	6.2
1.94	5.7	2.05	6.25
1.95	5.75	2.06	6.3
1.96	5.8	2.07	6.35
1.97	5.85	2.08	6.4
1.98	5.9	2.09	6.45
1.99	5.95	2.1	6.5

Figure: $f(x) = 5x - 4$

Figure: $f(x) = 5x - 4$

Ejemplo

Halle el límite de la función $f(x) = \frac{1}{x}$ cuando x tiende a 2.

Respuesta/ El límite de la función $f(x) = \frac{1}{x}$ cuando x tiende a 2 es igual a 0.5.

Límite Inferior		Límite Superior	
Dominio (x)	Rango (Y)	Dominio (x)	Rango (Y)
1.9	0.52631579	2.01	0.49751244
1.91	0.52356021	2.02	0.4950495
1.92	0.52083333	2.03	0.49261084
1.93	0.51813472	2.04	0.49019608
1.94	0.51546392	2.05	0.48780488
1.95	0.51282051	2.06	0.48543689
1.96	0.51020408	2.07	0.48309179
1.97	0.50761421	2.08	0.48076923
1.98	0.50505051	2.09	0.4784689
1.99	0.50251256	2.1	0.47619048

Figure: $f(x) = \frac{1}{x}$

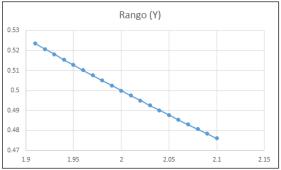


Figure: $f(x) = \frac{1}{x}$

Definición

Escriba

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L$$

y se lee el límite izquierdo de $f(x)$ cuando x tiende a a (o el límite de $f(x)$ cuando x se acerca a a por la izquierda) es igual a L, si puede aproximar a los valores de $f(x)$ a L tanto como quiera, escogiendo una x lo bastante cerca de a pero menor que a. (Stewart, pág. 93)

Ejemplo

Halle el límite izquierdo o inferior de la función $f(x) = 10 - 3x$.

Límite izquierdo	
Dominio (x)	Rango (Y)
4.8	-4.4
4.81	-4.43
4.82	-4.46
4.83	-4.49
4.84	-4.52
4.85	-4.55
4.86	-4.58
4.87	-4.61
4.88	-4.64
4.89	-4.67
4.9	-4.7
4.91	-4.73
4.92	-4.76
4.93	-4.79
4.94	-4.82
4.95	-4.85
4.96	-4.88
4.97	-4.91
4.98	-4.94
4.99	-4.97
5	-5

Figure: $f(x) = 10 - 3x$

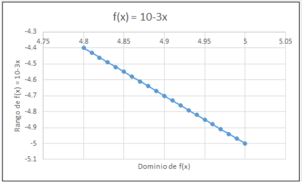


Figure: $f(x) = 10 - 3x$

Definición

Escriba

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L$$

y se lee el límite derecho de $f(x)$ cuando x tiende a a (o el límite de $f(x)$ cuando x se acerca a a por la derecha) es igual a L, si puede aproximar a los valores de $f(x)$ a L tanto como quiera, escogiendo una x lo bastante cerca de a pero mayor que a.

Ejemplo

Halle el límite derecho o superior de la función $f(x) = 10 - 3x$.¿Tienden el límite derecho e izquierdo cuándo $x \to 5$ al mismo valor L?

Límite derecho	
Dominio (x)	Rango (Y)
5	-5
5.01	-5.03
5.02	-5.06
5.03	-5.09
5.04	-5.12
5.05	-5.15
5.06	-5.18
5.07	-5.21
5.08	-5.24
5.09	-5.27
5.1	-5.3
5.11	-5.33
5.12	-5.36
5.13	-5.39
5.14	-5.42
5.15	-5.45
5.16	-5.48
5.17	-5.51
5.18	-5.54
5.19	-5.57
5.2	-5.6

Figure: $f(x) = 10 - 3x$

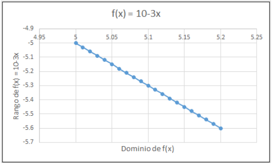


Figure: $f(x) = 10 - 3x$

Ejercicio

Halle el límite de la siguiente función por tramos cuando $x \to 2$ ¿Es el mismo por ambos lados de 2.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & if \quad X < 2 \\ x & if \quad X > 2 \end{cases}$$

Ejercicio

Halle el límite de la siguiente función por tramos cuando x tiende a 2 ¿Es el mismo por ambos lados de 2?.

Respuesta/

Límite por la izquierda		Límite por la derecha	
Dominio (x)	Rango (Y)	Dominio (x)	Rango (Y)
1.91	0.52356021	2.01	2.01
1.92	0.52083333	2.02	2.02
1.93	0.51813472	2.03	2.03
1.94	0.51546392	2.04	2.04
1.95	0.51282051	2.05	2.05
1.96	0.51020408	2.06	2.06
1.97	0.50761421	2.07	2.07
1.98	0.50505051	2.08	2.08
1.99	0.50251256	2.09	2.09
2	0.5	2.1	2.1

Figure: Función por tramos

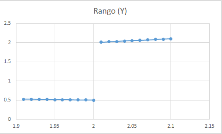


Figure: Función por tramos

Definición

Sea f una función definida en ambos lados de a, excepto posiblemente en a; entonces:

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty$$

significa que los valores de f(x) se pueden hacer arbitrariamente grandes (tan grandes como uno quiera) haciendo que x se acerque suficientemente a a, pero no es igual que a. (Stewart, pág. 94)

Ejemplo

Límite por la izquierda		Límite por la derecha	
Dominio (x)	Rango (Y)	Dominio (x)	Rango (Y)
2.9	58	3.01	602
2.91	64.6666667	3.02	302
2.92	73	3.03	202
2.93	83.7142857	3.04	152
2.94	98	3.05	122
2.95	118	3.06	102
2.96	148	3.07	87.7142857
2.97	198	3.08	77
2.98	298	3.09	68.6666667
2.99	598	3.1	62

Figure: Elaboración propia

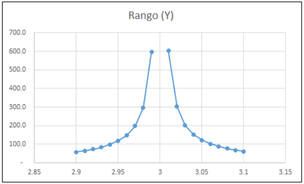


Figure: Elaboración propia

Definición

Sea f una función definida en ambos lados de a, excepto posiblemente en a; entonces:

$$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$$

significa que los valores de f(x) se pueden hacer arbitrariamente pequeños haciendo que x se acerque suficientemente a a, pero no es igual que a. (Stewart, pág. 94)

Ejemplo

Límite por la izquierda		Límite por la derecha	
Dominio (x)	Rango (Y)	Dominio (x)	Rango (Y)
2.9	-58	3.01	-602
2.91	-64.6666667	3.02	-302
2.92	-73	3.03	-202
2.93	-83.7142857	3.04	-152
2.94	-98	3.05	-122
2.95	-118	3.06	-102
2.96	-148	3.07	-87.7142857
2.97	-198	3.08	-77
2.98	-298	3.09	-68.6666667
2.99	-598	3.1	-62

Figure: Elaboración propia

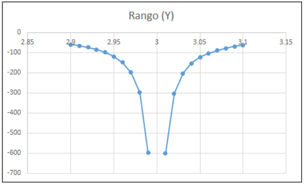


Figure: Elaboración propia

Definición precisa

Se dice que el límite de una función $f(x)$ alrededor de un valor a existe siempre y cuando:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \text{ si y sólo si } \lim_{x \to a^-} f(x) = L \text{ y } \lim_{x \to a^+} f(x) = L$$

Es decir, el límite de una función $f(x)$ alrededor de un valor a existe en la medida que al acercanos por ambos lados de dicho valor, la función $f(x)$ siendo este igual a L.

Suponga que c es una constante y que los límites

$$\lim_{x \to a} f(x) \text{ y } \lim_{x \to a} g(x)$$

existen. Entonces

- $\lim_{x \to a} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x)$
- $\lim_{x \to a} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) - \lim_{x \to a} g(x)$
- $\lim_{x \to a} [cf(x)] = c \lim_{x \to a} [f(x)]$
- $\lim_{x \to a} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) \cdot \lim_{x \to a} g(x)$
- $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)}$ si $\lim_{x \to a} g(x) \neq 0$

- $\lim_{x \to a} c = c$
- $\lim_{x \to a} x = a$
- $\lim_{x \to a} x^n = a^n$
- $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ siempre y cuando a esté en el dominio de f

Grafique las siguientes funciones y encuentre sus límites:

- $\lim_{x \to 10} 33$
- $\lim_{x \to 4} [3x + 8x]$
- $\lim_{x \to 8} [10x]$
- $\lim_{x \to 5} [2x \cdot 7x]$

Evalúe el límite y justifique cada etapa indicando las leyes de los límites apropiadas.

- $\lim\limits_{x\to 2}[3x^4 + 2x^2 - x + 1]$
- $\lim\limits_{x\to 4}[(1+\sqrt{x})(2-6^2+x^3)]$
- $\lim\limits_{x\to 2}[\frac{2x^2+1}{x^2+6x-4}]$
- $\lim\limits_{x\to 2}[\frac{x^2+x-6}{x-2}]$
- $\lim\limits_{x\to 4}[\frac{x^2-4x}{x^2-3x-4}]$

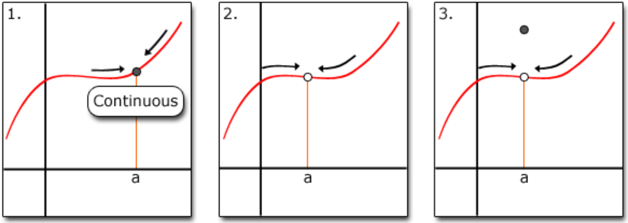


Figure: http://bclearningnetwork.com

Una función f es continua en un número a si:

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

Advierta que la definición requiere implícitamente tres cosas si f es continua en a:

- $f(a)$ está definido (es decir, a está en el dominio de f)
- $\lim_{x \to a} f(x)$ existe
- $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

¿En dónde son discontinuas cada una de las siguientes funciones?

- $f(x) = \dfrac{2}{x-2}$
- $f(x) = \dfrac{2}{(x-2)(x-4)}$
- $f(x) = \dfrac{x^2 - x - 2}{x-2}$
- $f(x) = \dfrac{x^2 + x - 6}{x-2}$

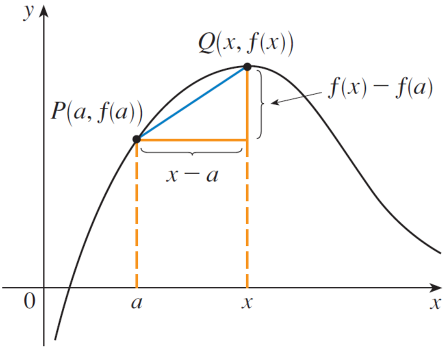


Figure: (Stewart (2008), pág. 144)

La recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto $P(a, f(a))$ es la recta que pasa por P con pendiente:

$$m = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

si este límite existe.

Ejemplo 1

Si una pelota se lanza al aire hacia arriba, su altura una vez transcurren t segundos está dada por $y = 40t - 16t^2$. Encuentre la velocidad después de $t = 2$ utilizando la fórmula del límite.(Stewart (2008), pág. 151)

h	0.0001	
	Dominio	Rango
a	2	16
a+h	2.0001	15.9975998
Diferencia	0.0001	-0.00240016
Derivada	-24.0016	

Figure: Elaboración propia

Ejemplo 2

El desplazamiento (en metros) de una partícula que se mueve en línea recta está dado por la ecuación del movimiento $s = \frac{1}{t^2}$, donde t se mide en segundos. Halle la velocidad de la partícula en los instantes $t = 1$, $t = 1$, $t = 2$ y $t = 3$ utilizando la fórmula del límite.(Stewart (2008), pág. 151)

h	0.0001		h	0.0001		h	0.0001	
	Dominio	Rango		Dominio	Rango		Dominio	Rango
a	1	1	a	2	0.25	a	3	0.11111111
a+h	1.0001	0.99980003	a+h	2.0001	0.249975	a+h	3.0001	0.1111037
Diferencia	1E-04	-0.00019997	Diferencia	0.0001	-2.4998E-05	Diferencia	0.0001	-7.407E-06
Derivada	-1.99970004		Derivada	-0.24998125		Derivada	-0.07407037	

Figure: Elaboración propia

Definición

La derivada de una función f en un número a, se indica mediante $f^{'}(a)$, es

$$f^{'}(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

si este límite existe.

- $\frac{d(c)}{dx} = 0$
- $\frac{d(x)}{dx} = 1$
- $\frac{d(x^n)}{dx} = nx^{n-1}$
- $\frac{d[cf(x)]}{dx} = c\frac{df(x)}{dx}$
- $\frac{d[f(x)+g(x)]}{dx} = \frac{df(x)}{dx} + \frac{dg(x)}{dx}$
- $\frac{d[f(x)-g(x)]}{dx} = \frac{df(x)}{dx} - \frac{dg(x)}{dx}$

- $\frac{de^x}{dx} = e^x$
- $\frac{d[f(x)g(x)]}{dx} = f(x)\frac{dg(x)}{dx} + g(x)\frac{df(x)}{dx}$
- $\frac{d}{dx}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{g(x)\frac{df(x)}{dx} - f(x)\frac{dg(x)}{dx}}{[g(x)]^2}$
- $\frac{dg(f(x))}{dx} = \frac{dg(f(x))}{df(x)}\frac{df(x)}{dx}$
- $\frac{d}{dx}(\ln(x)) = \frac{1}{x}$

Calcule las derivadas de los ejemplos 1 y 2, del aparte La Tangencia, utilizando las reglas de derivación. Verifique que los resultados encontrados por este último método coincidan con los encontrados a través de la definición de límite.

Encuentre la derivada de la función. (Stewart (2008), pág. 163)

- $f(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{3}$
- $f(x) = 10x^5 + 40x^3$
- $f(t) = 5t - 9t^2$
- $f(x) = 1.5x^2 - x + 3.7$
- $f(x) = x^3 - 3x + 5$
- $f(x) = x + \sqrt[3]{x}$
- $f(x) = \sqrt[2]{1 + 2x}$

$$R_n = f(x_1)\,\Delta x + f(x_2)\,\Delta x + \cdots + f(x_n)\,\Delta x$$

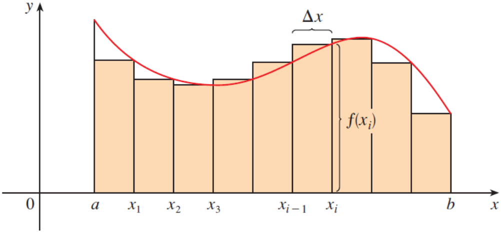


Figure: El área bajo la curva. (Stewart, J. 2008, pág. 359)

La suma de Riemann (para el cálculo de áreas) es una metodologia que sirve para calcular áreas, entre otros, mediante:

- La identificación de la función $f(x)$ (en el caso de un área) para la cual se quiere calcular el área o volumen, respectivamente.
- La identificación del intervalo, que va de a hasta b, para el cual se quiere calcular el área de una función $f(x)$.
- La división del intervalo, que va de a hasta b, en n partes iguales: $\frac{b-a}{n}$.La división del intervalo en n partes busca calcular el área bajo la curva de la función $f(x)$ como la suma de las áreas de los rectángulos en los que se ha descompuesto.

- El cálculo del área de cada rectángulo en los que se ha descompuesto el área total de la función $f(x)$. De la Geometría sabemos que el área de un rectangulo es igual a *base* x *altura*; la base, para cada rectángulo es igual a $\frac{b-a}{n}$, y la altura es igual a función $f(x)$ con x igual al límite superior del intervalo, al límite inferior o a su promedio.
- Finalmente, una vez se tienen las áreas de cada rectángulo, él área bajo la curva de la función $f(x)$ es igual a la suma de las áreas de todos los rectángulos en los que el intervalo, que va de a hasta b, se ha dividido.

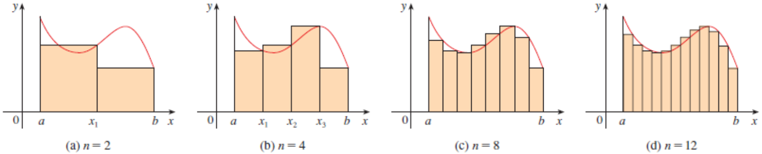


Figure: ¿Cuál es el número n de divisiones que mejor me aproxima al área bajo la curva? (Stewart, J. 2008, pág. 359)

El área A de la región S que se encuentra debajo de la gráfica de la función continua f es el límite de la suma de las áreas de los rectángulos de aproximación:

$$A = \lim_{n \to \infty} R_n = \lim_{n \to \infty} [f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + f(x_3)\Delta x + ... + f(x_n)\Delta x]$$

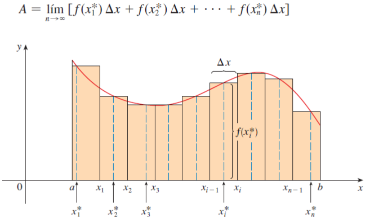


Figure: (Stewart, J. 2008, pág. 360)

Ejemplo 1

Calcule el área bajo la curva de la función $f(x) = x^2$ en el intervalo comprendido entre 0 y 1.

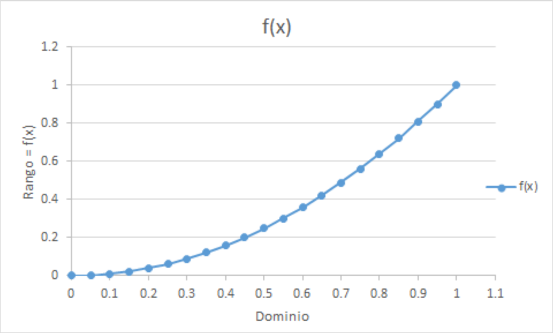


Figure: Muestre gráficamente el cálculo del área bajo la curva utilizando la suma de Riemann.

Ejemplo 1

	Límite inferior intervalo		Límite superior intervalo	
Dominio	f(x)	Área	f (x)	Área
0	0	0	0.0025	0.000125
0.05	0.0025	0.000125	0.01	0.0005
0.1	0.01	0.0005	0.0225	0.001125
0.15	0.0225	0.001125	0.04	0.002
0.2	0.04	0.002	0.0625	0.003125
0.25	0.0625	0.003125	0.09	0.0045
0.3	0.09	0.0045	0.1225	0.006125
0.35	0.1225	0.006125	0.16	0.008
0.4	0.16	0.008	0.2025	0.010125
0.45	0.2025	0.010125	0.25	0.0125
0.5	0.25	0.0125	0.3025	0.015125
0.55	0.3025	0.015125	0.36	0.018
0.6	0.36	0.018	0.4225	0.021125
0.65	0.4225	0.021125	0.49	0.0245
0.7	0.49	0.0245	0.5625	0.028125
0.75	0.5625	0.028125	0.64	0.032
0.8	0.64	0.032	0.7225	0.036125
0.85	0.7225	0.036125	0.81	0.0405
0.9	0.81	0.0405	0.9025	0.045125
0.95	0.9025	0.045125	1	0.05
1	1			
	Área límite inferior	0.30875	Área límite superior	0.35875

Figure: Aproximación al área bajo la curva con $n = 20$

Ejemplo 1

	Límite inferior intervalo		Límite superior intervalo	
Dominio	f(x)	Área	f (x)	Área
0	0	0	0.000625	1.5625E-05
0.025	0.000625	1.5625E-05	0.0025	0.0000625
0.05	0.0025	0.0000625	0.005625	0.00014063
0.075	0.005625	0.00014063	0.01	0.00025
0.1	0.01	0.00025	0.015625	0.00039063
0.125	0.015625	0.00039063	0.0225	0.0005625
0.15	0.0225	0.0005625	0.030625	0.00076563
0.175	0.030625	0.00076563	0.04	0.001
0.2	0.04	0.001	0.050625	0.00126563
0.225	0.050625	0.00126563	0.0625	0.0015625
0.85	0.7225	0.0180625	0.765625	0.01914063
0.875	0.765625	0.01914063	0.81	0.02025
0.9	0.81	0.02025	0.855625	0.02139063
0.925	0.855625	0.02139062	0.9025	0.0225625
0.95	0.9025	0.0225625	0.950625	0.02376563
0.975	0.950625	0.02376563	1	0.025
1	1			
	Área límite inferior	0.3209375	Área límite superior	0.3459375

Figure: Aproximación al área bajo la curva con $n = 40$

Ejemplo 2

Calcule el área bajo la curva de la función $f(x) = \sqrt{x}$ en el intervalo comprendido entre 0 y 1.

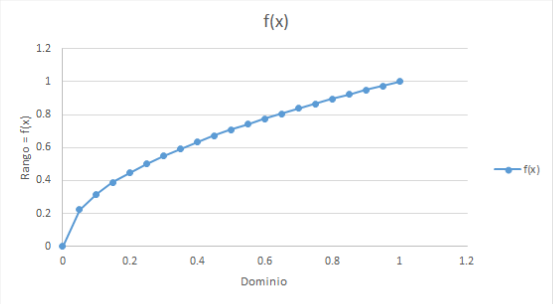


Figure: Muestre gráficamente el cálculo del área bajo la curva utilizando la suma de Riemann.

Ejemplo 2

	Límite inferior intervalo		Límite superior intervalo	
Dominio	f(x)	Área	f (x)	Área
0	0	0	0.223606798	0.01118034
0.05	0.223606798	0.01118034	0.316227766	0.01581139
0.1	0.316227766	0.01581139	0.387298335	0.01936492
0.15	0.387298335	0.01936492	0.447213595	0.02236068
0.2	0.447213595	0.02236068	0.5	0.025
0.25	0.5	0.025	0.547722558	0.02738613
0.3	0.547722558	0.02738613	0.591607978	0.0295804
0.35	0.591607978	0.0295804	0.632455532	0.03162278
0.4	0.632455532	0.03162278	0.670820393	0.03354102
0.45	0.670820393	0.03354102	0.707106781	0.03535534
0.5	0.707106781	0.03535534	0.741619849	0.03708099
0.55	0.741619849	0.03708099	0.774596669	0.03872983
0.6	0.774596669	0.03872983	0.806225775	0.04031129
0.65	0.806225775	0.04031129	0.836660027	0.041833
0.7	0.836660027	0.041833	0.866025404	0.04330127
0.75	0.866025404	0.04330127	0.894427191	0.04472136
0.8	0.894427191	0.04472136	0.921954446	0.04609772
0.85	0.921954446	0.04609772	0.948683298	0.04743416
0.9	0.948683298	0.04743416	0.974679434	0.04873397
0.95	0.974679434	0.04873397	1	0.05
1	1			
	Área límite inferior	0.63944659	Área límite superior	0.68944659

Figure: Aproximación al área bajo la curva con $n = 20$

Ejemplo 2

	Límite inferior intervalo		Límite superior intervalo	
Dominio	f(x)	Área	f (x)	Área
0	0	0	0.158113883	0.00395285
0.025	0.158113883	0.00395285	0.223606798	0.00559017
0.05	0.223606798	0.00559017	0.273861279	0.00684653
0.075	0.273861279	0.00684653	0.316227766	0.00790569
0.1	0.316227766	0.00790569	0.353553391	0.00883883
0.125	0.353553391	0.00883883	0.387298335	0.00968246
0.15	0.387298335	0.00968246	0.418330013	0.01045825
0.175	0.418330013	0.01045825	0.447213595	0.01118034
0.2	0.447213595	0.01118034	0.474341649	0.01185854
0.225	0.474341649	0.01185854	0.5	0.0125
0.25	0.5	0.0125	0.524404424	0.01311011
0.8	0.894427191	0.02236068	0.908295106	0.02270738
0.825	0.908295106	0.02270738	0.921954446	0.02304886
0.85	0.921954446	0.02304886	0.935414347	0.02338536
0.875	0.935414347	0.02338536	0.948683298	0.02371708
0.9	0.948683298	0.02371708	0.961769203	0.02404423
0.925	0.961769203	0.02404423	0.974679434	0.02436699
0.95	0.974679434	0.02436699	0.987420883	0.02468552
0.975	0.987420883	0.02468552	1	0.025
1	1			
	Área límite inferior	0.65337097	Área límite superior	0.67837097

Figure: Aproximación al área bajo la curva con $n = 40$

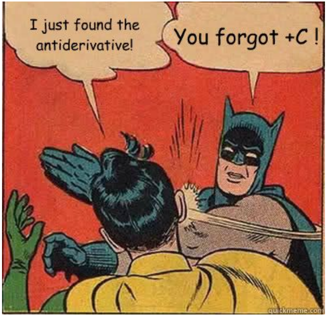


Figure: https://s-media-cache-ak0.pinimg.com

Una función F recibe el nombre de antiderivada de f sobre un intervalo I si $F^{'}(x) = f(x)$ para todo x en I.

Función	Antiderivada particular
$cf(x)$	$cF(x)$
$f(x)+g(x)$	$F(x)+G(x)$
$x^n \ (n \neq -1)$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$
$\frac{1}{x}$	lnx
e^x	e^x

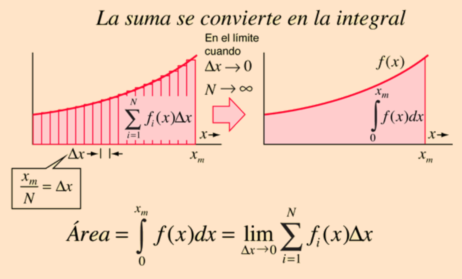


Figure: http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbasees/imgmth/iarea3.gif

Definición

Si f es una función continua definida para $a \leq x \leq b$, dividida en el intervalo $[a, b]$ en n subintervalos de igual ancho $\delta x = (b-a)/n$. Entonces la integral definida de f, desde a hasta b, es

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \to \infty} [f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + f(x_3)\Delta x + ... + f(x_n)\Delta x]$$

o lo que es lo mismo,

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$$

siempre que exista este límite, si existe, f es integrable en $[a, b]$.

Definición

Teorema fundamental del cálculo, parte 1

Si f es continua en $[a, b]$, entonces la función g está definida por

$$g(x) = \int_a^x f(t)dt \text{ y } a \leq x \leq b$$

es continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b), y $g(x) = f(x)$

Definición

Teorema fundamental del cálculo, parte 2

Si f es continua en $[a, b]$, entonces

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

donde F es una antiderivada de f, es decir, una función tal que $F^{'} = f$.

Reglas de Integración

- $\int cf(x)dx = c\int f(x)dx$
- $\int kdx = kx + C$
- $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \ (n \neq -1)$
- $\int e^x dx = e^x + C$
- $\int [f(x) + g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$
- $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$
- $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$

Ejemplo 1

Calcule el área bajo la curva de la función $f(x) = x^2$ en el intervalo comprendido entre 0 y 1 utilizando el método de la integración, y verifique que el resultado encontrado concuerde con el alcanzado a través de la suma de Riemann

Según el cálculo del área siguiendo la metodología de la suma de Riemann, a medida que n tendía a ∞, el valor del área se encontraba entre 0.32 y 0.34.

Según la segunda parte del *Teorema Fundamental del Calculo* el área comprendida entre los puntos 1 y 0 es igual a:

$$\int_0^1 X^2 dx = F(1) - F(0) = \frac{1^{(2+1)}}{2+1} - \frac{0^{(2+1)}}{2+1} = \frac{1}{3} - \frac{0}{3} = \frac{1}{3}$$

Ejemplo 2

Calcule el área bajo la curva de la función $f(x) = \sqrt{x}$ en el intervalo comprendido entre 0 y 1 utilizando el método de la integración, y verifique que el resultado encontrado concuerde con el alcanzado a través de la suma de Riemann.

Según el cálculo del área siguiendo la metodología de la suma de Riemann, a medida que n tendía a ∞, el valor del área se encontraba entre 0.65 y 0.67.

Según la segunda parte del *Teorema Fundamental del Calculo* el área comprendida entre los puntos 1 y 0 es igual a:

$$\int_0^1 \sqrt{x}dx = F(1) - F(0) = \frac{1^{(0.5+1)}}{0.5+1} - \frac{0^{(0.5+1)}}{0.5+1} = \frac{1}{1.5} - \frac{0}{1.5} = \frac{1}{1.5} = 0.66$$

"I wish we hadn't learned probability 'cause I don't think our odds are good."

- Espacio muestral: hace referencia al conjunto de todos los posibles resultados de un experimento. Denotaremos por S el conjunto compuesto por la totalidad de los eventos que pueden resultar del experimento.
- Evento simple: hace referencia a uno de los posibles resultados de un experimento que no es posible descomponer en otros eventos individuales. Denotaremos por A un evento simple que puede resultar del experimento. Cada evento simple corresponde a un punto muestral.
- Evento compuesto: hace referencia a un cojunto de posibles resultados de un experimento que está compuesto por dos o más eventos simples. Denotaremos por B un subconjunto de eventos que pueden resultar del experimento.
- Probabilidad: es el valor asignado a un evento A, que hace parte de un espacio muestral S, y que representa la posibilidad de que dicho evento específico se realice en el marco de un experimento.

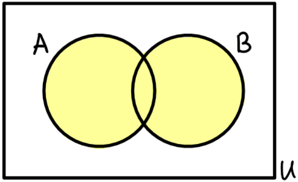
Existe una función que cumple las siguientes condiciones y representa la probabilidad de que un evento se presente como parte de un experimento:

- $P(A) >= 0$, para todos los eventos que pueden resultar del experimento.
- $P(S) = 1$

Si divido el espacio muestral S en los subconjuntos A, B, C y D (que contienen la totalidad de los eventos que caracterizan el espacio muestral); y estos subconjuntos son mutuamente excluyentes, es decir, que los eventos comprendidos en cada uno de ellos son exclusivos de cada subconjunto, se debe poder afirmar que:

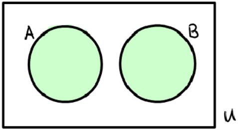
$$\sum_{i=A}^{D} P(i) = P(A) + P(B) + P(C) + P(D) = 1$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$



Mutually Exclusive

$$P(A \cap B) = 0$$
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$



Ejemplo

Un fabricante tiene cinco terminales de computadora aparentemente idénticas listas para ser enviadas. Sin que él lo sepa, dos de las cinco están defectuosas. Un pedido en particular solicita dos de las términales y el pedido se surte seleccionado al azar dos de las cinco de que se dispone:

- Indique el espacio muestral para el experimento.
- Denote con A el evento de que el pedido se surta con dos terminales no defectuosas. Indique los puntos muestrales en A.
- Construya un diagrama de Veen para el experimento que ilustre el evento A.
- Asigne probabilidad a los eventos simples en tal forma que se use la información acerca del experimento y se satisfagan las condiciones de la probabilidad.
- Encuentre la probabilidad del evento A.

Ejemplo

Los estadounidenses pueden ser bastante suspicaces, en especial cuando se trata de conspiraciones del gobierno. Sobre la pregunta de si la Fuerza Aérea de Estados Unidos tiene oculta la prueba de la existencia de vida inteligente en otros planetas, las proporciones de estadounidesnes con opiniones que varían se dan en la tabla:

Opinión	Proporción
Muy probable	0.24
Poco probable	0.24
Improbable	0.40
Otra	0.12

Suponga que se selecciona un estadounidese y que se registra su opinión.

- ¿Cuáles son los eventos simples para este experimento?
- Todos los eventos simples que usted dio en el inciso a, ¿son igualmente probables? Si no es así, ¿cuáles son las probabilidad que deben asignarse a cada uno?
- ¿Cuál es la probabilidad de que la persona seleccionara encuentre al menos un poco probable que la Fuerza Aérea esté ocultando información acerca de vida inteligente en otros planetas?

El método de punto muestral para hallar la probabilidad de un evento, simple o compuesto, se compone de los siguientes pasos:

- Defina el experimento y determine con tota claridad cómo descbirir un evento simple.
- Indique los eventos simples asociadas con el experimento y pruebe cada uno para asegurarse que no se pueden descomponer. Esto define el espacio muestral
- Realice el experimento un número n de repeticiones, determine cuántas ocasiones se presentó cada uno de los eventos simples y calcule la probabilidad de cada evento simple, siendo igual a $\frac{n(A)}{n(S)}$.
- Defina un evento compuesto, B, que pueda ser de su interés.
- Halle la probabilidad de que se presente el evento B, $P(B)$, como la suma de las probabilidades de los eventos simples. Tenga en cuenta que es posible encontrar la probabilidad del evento compuesto como la suma de las probabilidades de los eventos simples, en la medida que estos son mutuamente excluyentes.

Ejemplo

La Oficina del Censo reporta que el ingreso familiar mediano para todas las familias en Estados Unidos, durante el años 2003, fue de $43,318$. Esto es, la mitad de todas las familias estadounidenses tuvo ingreso que rebasaba esta cantidad y la mitad tuvo ingreso iguales o menores a esta cantidad. Suponga que se hace una encuesta a cuatro familias y que cada una de ellas revela si su ingreso rebasó los $43,318$ en 2003.

- Indique los puntos del espacio muestral.
- Identifique los eventos simples en cada uno de los eventos siguientes.
  - al menos dos tuvieron ingresos de mas de $43,318$.
  - exactamente dos tuvieron ingresos de más de $43,318$.
  - exactamente una tuvo ingresos menores o iguales a $43,318$.
- Haga uso de la interpretación dada para la mediana para asignar probabilidades a los eventos simples y encuentre las probabilidades de cada uno de los anteriores eventos compuestos.

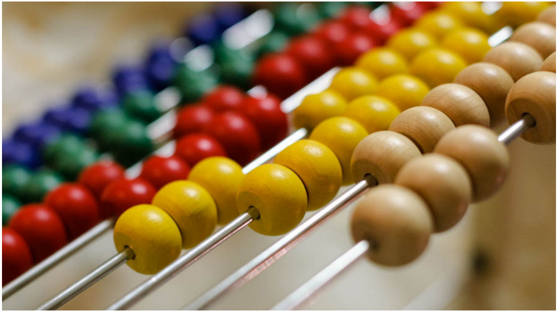


Figure: Técnicas de Conteo

Definición

Una técnica de conteo es una herramienta que nos permite determinar la cantidad de eventos simples que componen un evento compuesto en el marco de un experimento.

Teniendo en cuenta que podemos definir la probabilidad de un evento B como $\frac{n(B)}{n(S)}$, las técnicas de conteo nos permiten conocer el número de eventos simples que hacen parte del evento compuesto B.

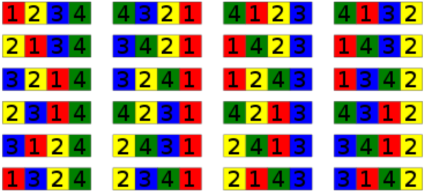


Figure: Permutación

Es un arreglo ordenado de r objetos distintos. El número de formas de ordenar n objetos tomados r a la vez estará designado por el símbolo P_r^n.

El primer objeto se puede seleccionar en una de n formas; el segundo objeto se puede escoger en (n-1) formas; el tercer objeto se puede escoger en (n-2), y el r-ésimo objeto se puede escoger en (n-r+1) formas. En consecuencia, el número de arreglos distintos está dado por:

$$P_r^n = n(n-1)(n-2)(n-3)...(n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

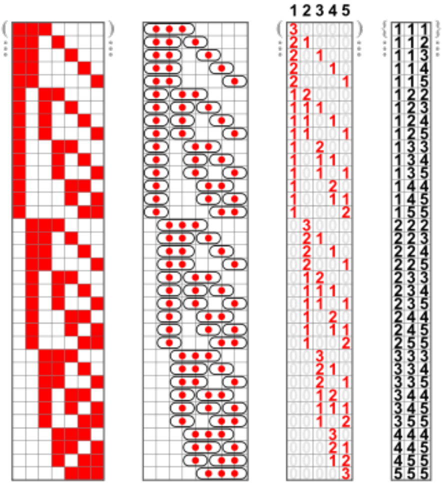


Figure: Combinación

Es el número de subconjuntos de r elementos que se pueden formar a partir de un espacio muestral que tiene un total de n elementos, donde $n > r$. Este número se puede denotar a partir de C_r^n.

El número de subconjuntos desordenados de tamaño r escogidos (sin restitución) de n objetos disponibles:

$$C_r^n = \frac{P_r^n}{r!} = \frac{n!}{(n-r)!} \div \frac{r!}{1} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

La diferencia entre una permutación y una combinatoria es que en la primera el interés se centra en contar todos los posibles subconjuntos de elementos en todos sus posibles órdenes, mientras que en la segunda el interés solo recae en contar el número de subconjuntos diferentes.

De esta manera, al hacer referencia a una combinatoria, *abc* y *bac* son un mismo subconjunto, mientras que desde el punto de vista de la permutación, son subconjuntos diferentes. (Canavos, pág. 47)

- En una venta de garaje, un mujer compra cinco tenedores, cuatro cuchillos y siete cuchares. ¿En cuántas formas diferentes se puede organizar una mesa que contenta un cuchillo, una cuchara y un tenedor?
- ¿De cuántas maneras se puede formar un comité de 5 personas a partir de un grupo de 9?
- ¿Cuántas ensaladas diferentes de $1, 2, 3, 4, 5, 6$ ingredientes se pueden hacer con lechuga, tomate, cebolla, pimentón, zanahoria y maiz?

- De entre los 24 miembros de un club se sacan cuatro nombres para los puestos de presidente, vicepresidente, tesorero y secretario. ¿De cuántas maneras diferentes se pueden hacer esto?
- ¿De cuántas maneras diferentes se pueden contestar todas las preguntas de una prueba de falso o verdadero que consta de 20 preguntas?
- ¿De cuántas maneras diferentes se pueden presentar al público los cinco jugadores titulares de un equipo de baloncesto?

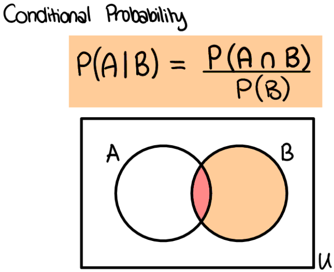


Figure: Probabilidad condicional

Definición

La probabilidad condicional de un evento es la probabilidad del evento dado el hecho de que uno o más eventos ya han ocurrido.

La probabilidad condicional de un evento A, dado que un evento B ha ocurrido, es igual a:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Ejemplo

Suponga que un dado balanceado se tira una vez. Encuentre la probabilidad de un 1, dado que se obtuvo un número impar.

- Se reparten cartas, una a la vez, de una baraja de 52 cartas.
  - Si las primeras 2 cartas son espadas, ¿cuál es la probabilidad de que las siguientes 3 cartas también sean espadas?
  - Si las primeras 3 cartas son todas de espadas, ¿cuál es la probabilidad de que las 2 cartas siguientes sean también espadas?
  - Si las primeras 4 cartas son todas de espadas, ¿cuál es la probabilidad de que la siguiente carta sea también una espada?
- Si dos eventos, A y B, son tales que $P(A) = 0.5$, $P(B) = 0.3$ y $P(A \cap B) = 0.1$, encuentre lo siguiente:
  - $P(A \mid B)$
  - $P(B \mid A)$
  - $P(A \mid A \cup B)$
  - $P(A \mid A \cup B)$
  - $P(A \cup B \mid A \cap B)$

- A child mixes 10 good and three dead batteries. To find the dead batteries, his father test them one-by-one and without replacement. If the first four batteries tested are all good, what is the probability that the fifth one is dead?
- A farmer decides to test four fertilizers for his soybean fields. He buys 32 bags of fertilizers, eight bags from each kind, and tries them randomly on 32 plots, eight plots from each of fields A, B, C, and D, one bar per plot. If from type I fertilizer one bag is tried on field A and three on field B, what is the probability that two bags of type I fertilizer are tried on field D?
- Suppose that 15 percent of the population of a country are unemployed women and a total of 25 percent are unemployed. What percent of the unemployed are women?

- A los habitantes de una gran ciudad se les hizo uan encuesta con el propósito de determinar el número de lectores de *Time* y *Newsweek*. Los resultados de la encuesta fueron los siguientes: 20 por ciento de los habitantes leen *Time* , el 16 por ciento lee el *Newsweek* y un 1 por ciento lee ambos semanarios. Si se selecciona al azar a un lector de *Time* ,¿cuál es la probabilidad de que también lea el *Newsweek*? (Canavos, pág.55)
- Una encuesta de consumidores en una comunidad particular mostró que 10 por ciento no estaban satisfechos con los trabajos de plomería realizados en su casas. La mitad de las quejas se refería al plomero A, que realiza el 40 por ciento de plomería de la población. Encuentre la probabilidad de que un consumidores obtenga: (Wackerly, pág.56)

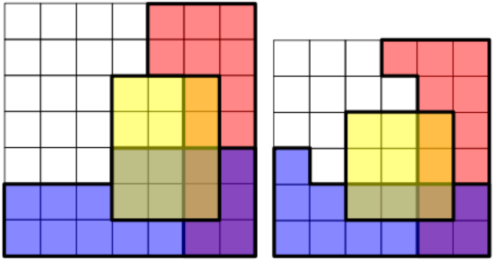


Figure: Independencia condicional

Definición

Sean A y B dos eventos cualesquiera de un espacio muestral S. Se dice que el evento A es estadísticamente independiente del evento B si $P(A|B) = P(A)$.

Se dice que dos eventos A y B son independientes si se cumple cualquiera de los siguientes casos:

- $P(A|B) = P(A)$
- $P(B|A) = P(B)$
- $P(A \cap B) = P(A)P(B)$

- A urns contains five red and seven blue balls. Suppose that two balls are selected at randome and with replacement. Let A and B be the events that the first and the second balls are red, respectively. Determine if events A and B are independent with and without replacement.

    - un trabajo de plomería no satisfactorio, dado que el plomero era A.
    - un trabajo de plomería satisfactorio, dado que el plomero era A.

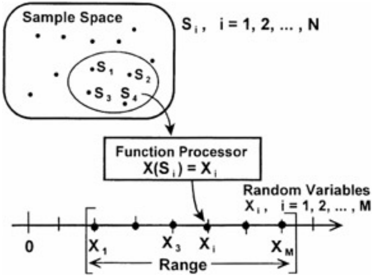


Figure: http://flylib.com/books/3/195/1/html/2/images/fig26001.jpg

Definición

Sea S un espacio muestral sobre el que se encuentra definida una función de probabilidad. Sea X una función de valor real definida sobre S, de manera que transforme los resultados de S en puntos sobre la recta de los reales. Se dice entonces que X es una variable aleatoria. (Canavos, G. pág.52).

Figure: https://www.flickr.com/photos/latitudes/529923170

Definición

Se dice que una variable aleatoria X es discreta si el número de valores que puede tomar es contable, y si éstos pueden arreglarse en una secuencia que corresponde con los enteros positivos.

Algunos ejemplos de variables aleatorias discretas son: los valores que se pueden obtener al lanzar un dado, el número de hijos que una familia puede tener, el número de celulares que se venden un momento determinado, el número de anotaciones que realiza un deportista, etc.

Definición

Sea X una varialbe aleatoria discreta. Se llamará función de masa de probabilidad a la $P(x_i) = P(X = x_i)$ si satisface las siguientes propiedades:

- $p(x_i) >= 0$ para todos los valores $x_i \in X$;
- $p(x_i) = 0$ para todos los valores $x_i \notin X$;
- $\sum_i p(x_i) = 1$

La función de masa de probabilidad se puede ilustrar en un plano cartesiano de dos dimensiones que represente:

- En el eje x, los diferentes eventos simples del espacio muestral de acuerdo a la transformación realizada por la función de valor real X.
- En el eje y, la probabilidad asociada a cada uno de los eventos simples.

Ejemplo

Eventos Simples	Variable Aleatoria Discreta	Número de Eventos	Función de Masa de Probabilidad	Función Acumulada de Probabilidad
	1	0	-	-
(1,1)	2	1	0.03	0.03
(1,2) y (2,1)	3	2	0.06	0.08
(3,1), (2,2) y (1,3)	4	3	0.08	0.17
(4,1), (3,2), (2,3) y (1,4)	5	4	0.11	0.28
(5,1), (4,2), (3,3), (2,4) y (1,5)	6	5	0.14	0.42
(6,1), (5,2), (4,3), (3,4), (2,5) y (1,6)	7	6	0.17	0.58
(6,2), (5,3), (4,4), (3,5) y (2,6)	8	5	0.14	0.72
(6,3), (5,4), (4,5) y (3,6)	9	4	0.11	0.83
(6,4), (5,5) y (4,6)	10	3	0.08	0.92
(6,5) y (5,6)	11	2	0.06	0.97
(6,6)	12	1	0.03	1.00
	13	0	-	1.00

Figure: Elaboración propia

Ejemplo

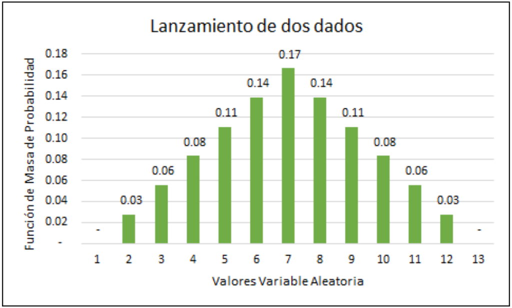


Figure: Elaboración propia

Definición

La función acumulada de probabilidad de la variable aleatoria discreta X es la probabilidad de que las realizaciones de X sean menor o igual a un valor específico de x y está dada por:

$$F(x) \equiv P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} p(x_i)$$

Ejemplo

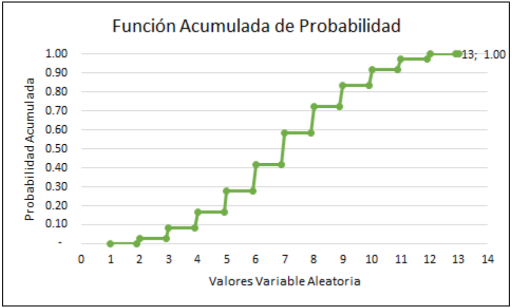


Figure: Elaboración propia

Ejercicios

1. Para cada una de las siguientes funciones, determine el valor o valores de k para los cuales p es una función de masa de probabilidad.
   - $p(x) = kx$, $x = 1, 2, 3, 4, 5$.
   - $p(x) = k(1 + x)^2$, $x = -2, 0, 1, 2$.

2. Un jurado es compuesto por un total de 12 personas obtenidas al azar de dos grupos, uno compuesto por 18 mujeres y el otro por 28 hombres. Encuentre la función de masa de probabilidad y la función acumulada de probabilidad para la probabilidad para la variable aleatoria X que representa el número de mujeres que es seleccionado.

- Un supervisor en una planta manufacturera tiene tres hombres y tres mujeres trabajando para él y desea escoger dos trabajadores para un trabajo especial. No queriendo mostrar sesgo en su selección, decide seleccionar los dos trabajadores al azar. Denote con Y el número de mujeres en su selección. Encuentre la distribución de probabilidad para Y.
- Se sabe que un grupo de cuatro componentes dos de ellos son defectuosos. Una inspectora prueba los componentes uno por uno hasta hallar los dos defectuosos. Una vez que los localiza, suspende la prueba pero el segundo defectuoso es probado para asegurar la precisión. Denote con Y el número de la prueba en la que se halló el segundo componente defectuoso. Encuentre la distribución de probabilidad para Y.

- Una sola célula puede morir, con probabilidad .1 o dividirse en dos células, con probabilidad .9, produciendo una nueva generación de células. Cada célula en la nueva generación muere o se divide independientemente en dos células, con las mismas probabilidades que la célula inicial. Encuentre la distribución de probabilidad para el número de células de la siguiente generación.

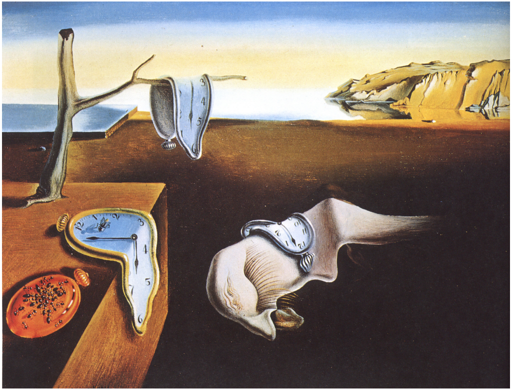


Figure: Salvador Dali

Definición

Se dice que una variable aleatoria X es continua si sus valores consisten en uno o más intervalos de la recta de los reales.

A diferencia de las variables aleatorias discretas, para las continuas no es posible asignar una probabilidad para cada valor específico de aquellos que ésta puede tomar. Por ello la probabilidad de que se presente un valor específico es igual a cero.

Una de las posibles razones que justifican la existencia de variables aleatorias continuas es la imposibilidad de medir de forma exacta determinados eventos que se presentan en la realidad, entre los cuales se encuentran: el tiempo, la lluvia, el peso, la temperatura, etc. Adicionalmente, las variables continuas, a diferencia de las variables discretas, no presentan discontinuidades o saltos.

Definición

La función de densidad de probabilidad es una función con dominio en los números reales y rango en los números reales positivos (incluyendo el cero), donde el dominio es construido a partir de subconjuntos de la variable aleatoria X.

$$P(X \in D) = P(a \leqslant x \leqslant b) = \int_a^b f(x)dx$$

La función de densidad de probabilidad debe cumplir las siguientes condiciones:

- $f(x) \geq 0$ para toda x, $-\infty < x < \infty$
- $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$

Ejemplo

Suponga que existe una variable aleatoria continua X que se distribuye uniforme en el intervalo comprendido entre 10 y 0. La función de densidad de probabilidad está dada por $f(x) = \dfrac{1}{10-0}$. Grafique la función de densidad de probabilidad.

Ejemplo

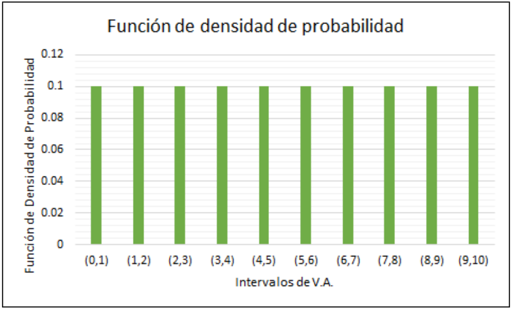


Figure: Elaboración propia

Definición

La función acumulada de probabilidad de la variable aleatoria continua X es igual a la probabilidad de que las realizaciones de X sean menores a un valor específico de X, por ejemplo t, está dada por:

$$F(t) \equiv P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{t} f(x)dx$$

Algunas propiedades de la función acumulada de probabilidad $F(x)$ son:

1. $F(t) \equiv P(X \leq t) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx$

2. $F(t) \equiv P(X \leq \infty) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$

Ejemplo

Suponga que existe una variable aleatoria continua X que se distribuye uniforme en el intervalo comprendido entre 10 y 0. La función de densidad de probabilidad está dada por $f(x) = \frac{1}{10-0} = \frac{1}{10}$. Grafique la función acumulada de probabilidad.

Ayuda: Tenga en cuenta que, de acuerdo a la definición anterior, la función de probabilidad acumulada es igual a:

$$F(x) \equiv P(X \leq x) = \int_0^x f(x)dx = \int_0^x \frac{1}{10-0}dx = \frac{x-0}{10-0} = \frac{x}{10}$$

Ejemplo

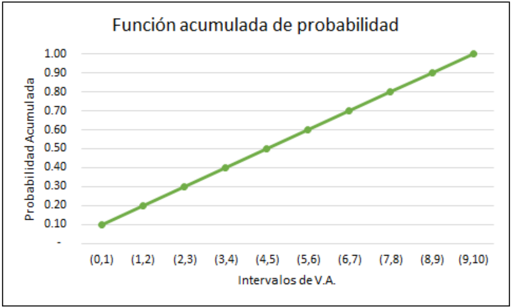


Figure: Elaboración propia

Ejercicios

Suponga que existe una variable aleatoria continua X que se distribuye uniforme en el intervalo comprendido entre 20 y 0. La función de densidad de probabilidad está dada por $f(x) = \frac{1}{20-0} = \frac{1}{20}$. Grafique la la función de densidad de probabilidad y la función acumulada de probabilidad.

Ayuda: Tenga en cuenta que, de acuerdo a la definición anterior, la función de probabilidad acumulada es igual a:

$$F(x) \equiv P(X \leq x) = \int_0^x f(x)dx = \int_0^x \frac{1}{20-0}dx = \frac{x-0}{20-0} = \frac{x}{20}$$

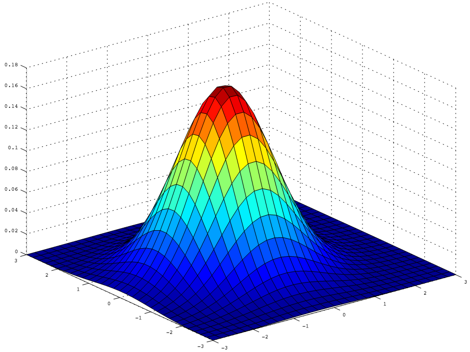


Figure: https://stats.stackexchange.com/questions/102632/plot-two-dimensional-gaussian-density-function-in-matlab

Definición

Sean X y Y dos variables aleatorias discretas. La probabilidad de que $X = x$ y $Y = y$ está determinada por la función de probabilidad bivariada

$$p(x, y) = P(X = x, Y = y)$$

en donde,

- La $p(x, y) \geqq 0$ para toda x, y, de X, Y
- La $\sum_y \sum_x P(x, y) = 1$. La suma se efectúa sobre todos los valores posibles de x y y.

Ejemplo No. 1- (Wackerly, pág.226)

Un supermercado local tiene tres cajas. Dos clientes llegan a las cajas en momentos diferentes cuando las cajas no atienden a otros clientes. Cada cliente escoge una caja de manera aleatoria, independiente del otro. Denote con X el número de clientes que escogen la caja 1 y con Y el número que selecciona la caja 2. Encuentre la función de probabilidad conjunta de X y Y.

Ejemplo No. 2 - (Ghahramani, pág. 312)

Small college has 90 male and 30 female professors. An ad hoc committee of five is selected at random to write the vision and mission of the college. Let X and Y be the number of men and women on this committee, respectively.

- (a) Find the joint probability mass function of X and Y .

Ejemplo No. 3 - (Ghahramani, pág. 313)

Roll a balanced die and let the outcome be X. Then toss a fair coin X times and let Y denote the number of tails. What is the joint probability mass function of X and Y and the marginal probability mass functions of X and Y?

Definición

Sean X y Y dos variables aleatorias discretas. La probabilidad de que $X \leq x$ y $Y \leq y$ está determinada por la función acumulativa de probabilidad bivariada:

$$F(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y) = \sum_{j=0}^{j} \sum_{i=0}^{i} p(x_i, y_j)$$

Definición

Sean X y Y dos variables aleatorias continuas. La función de densidad de probabilidad conjunta, $f(x_i, y_i)$, donde $X = x$ y $Y = y$ debe cumplir que:

1. $f(x_i, y_i) \geq 0$ para todo valor x_i, y_j
2. $P(a < x < b, c < y < d) = \int_a^b \int_c^d f(x_i, y_i)dxdy$
3. $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x_i, y_i)dxdy = 1$

Definición

Sean X y Y dos variables aleatorias continuas . La probabilidad de que $X \leq x$ y $Y \leq y$ está determinada por la función acumulativa de probabilidad conjunta:

$$F(a,b) = P(X \leq a, Y \leq b) = \int_{-\infty}^{a} \int_{-\infty}^{b} p(x_i, y_j) dxdy$$

Figure: https://www.flickr.com

Una variable aleatoria X que se distribuye Bernoulli contiene, unicamente, dos puntos sobre la recta de los reales. Uno de dichos resultados ha sido conocido como exito, y el otro, como fracaso. La probabilidad de que el experimento resulte en *exito* es igual a p, y que resulte en *fracaso* es igual a $(1 - P)$. Teniendo en cuenta que una v.a. es una función definida cuyo dominio es el espacio muestral y el rango los reales positivos, la v.a. Bernoulli será:

La función de masa de probabilidad para cada uno de los valores de la v.a. está definida como:

$$f(x) = \begin{cases} 1 - p \equiv q & if \quad X = 0 \\ p & if \quad X = 1 \\ 0 & \quad\quad dlc \end{cases}$$

La variable aleatoria Bernoulli es un caso específico de la distribución binomial, cuando el número de repeticiones n es igual a 1.

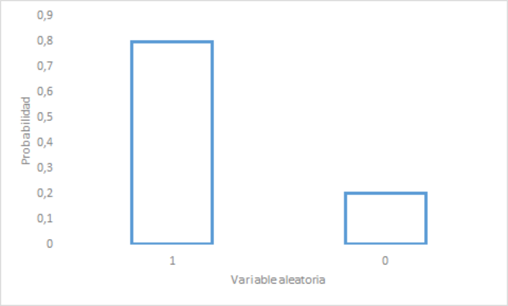


Figure: Elaboración propia

Una variable aleatoria X que se distribuye Binomial responde a la pregunta acerca de la probabilidad de que se presentan un número de *exitos* en el marco de n repeticiones del experimento. La distribución Binomial se construye a partir de una variable aleatoria Bernoulli repetida un número n de ocasiones. Cada repetición de la distribución Binominal presenta, únicamente, dos resultados: éxito o fracaso. En cada repetición, la probabilidad de *exito* es denotada por p, y la probabilidad de *fracaso* es igual a $(1-p)$. El resultado de cada prueba es independiente de los resultados de las anteriores; siguiendo la definición de independencia, la $P(exito|exito \text{ o } fracaso) = P(exito)$.

El dominio de la v.a. X con una distribución Binomial va desde 0 hasta el número de repeticiones n del experimento.

La función de masa de probabilidad está definida por:

$$p(x) = P(X = x) = \begin{cases} \binom{n}{k} P^x (1-p)^{(n-x)} & \textit{if} \quad X = 0, 1, 2, 3, ..., n \\ 0 & dlc \end{cases}$$

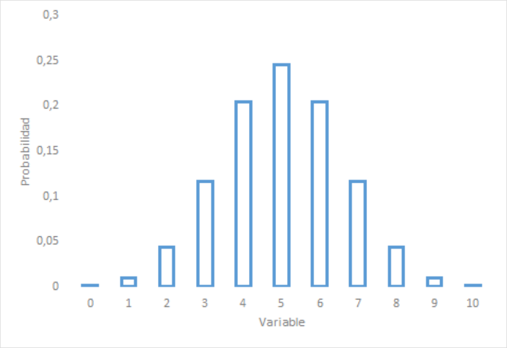


Figure: Elaboración propia

Una variable aleatoria X que se distribuye Hipergeométrica responde a la pregunta acerca de la probabilidad de que al extraer una muestra de tamaño n de una población (con tamaño N), se obtengan una cantidad x de éxitos.

La función de masa de probabilidad de la distribución hipergeométrica está definida por:

$$p(x) = P(X = x) = \frac{\binom{r}{x}\binom{a}{b}}{\binom{n}{k}}$$

donde:

- r es el número de elementos del *espacio muestral* que se considera un éxito;
- x es el número de éxitos del experimento;
- a es igual a la cantidad de elementos que hacen parte del espacio muestral que no se considera un exitos;
- b es el número de elementos que se extraen y hacen parte del subconjunto de elementos considerados como *fracasos*.

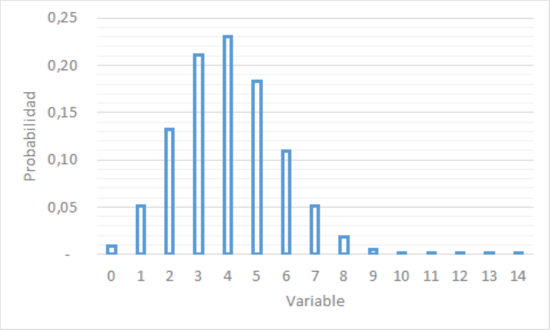


Figure: Elaboración propia

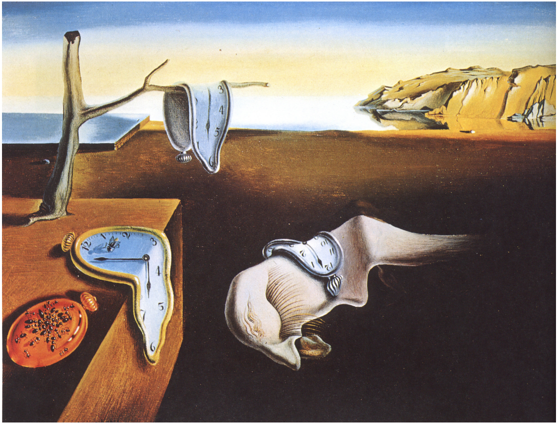


Figure: Salvador Dali

Una variable aleatoria X se distribuye uniforme sobre el intervalo (a, b) si su función de densidad de probabilidad está dada por:

La función de masa de probabilidad para cada uno de los valores de la v.a. está definida como:

$$f(x) = \begin{cases} 1/(b-a) & if \quad a \leq x \leq b \\ 0 & \quad dlc \end{cases}$$

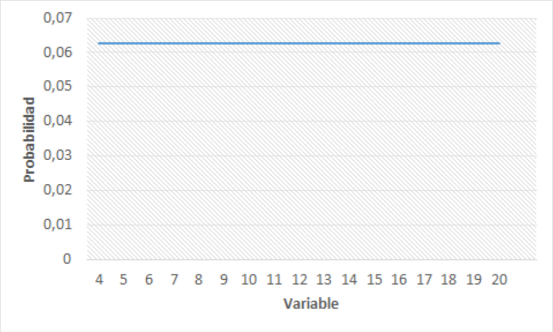


Figure: Elaboración propia

Se dice que una variable aleatoria X se encuentra normalmente distribuida si su función de densidad de probabilidad esta dada por:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} exp\{\frac{-1}{2}(\frac{x-\mu}{\sigma})^2\}$$

Los parámetros de la distribucion normal son μ y σ además determinan de manera completa la funcion de densidad de probabilidad.

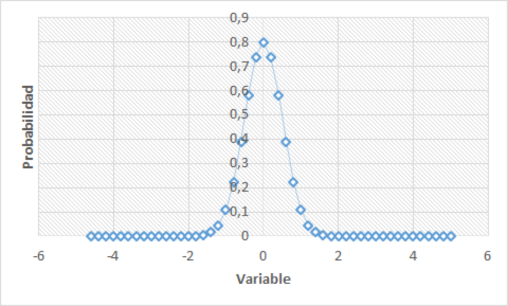


Figure: Elaboración propia

Figure: https://i.pinimg.com/

"La esperanza de una variable aleatoria tiene sus orígenes en los juegos de azar, debido a que los aposteadores deseaban saber cuál era su esperanza de ganar repetidamente un juego. En este sentido, el valor esperado representa la cantidad de dinero promedio que el jugador está dispuesto a ganar o perder después de un número muy grande de apuestas. Este significado también es valido para una variable aleatoria. Es decir, el valor promedio de una variable aleatoria después de un número grande de experimentos, es su valor esperado"(Canavos, G. 1988).

V.A. discreta

$$E(X) = \sum_{i}^{n} p(x_i)x_i$$

V.A. continua

$$E(X) = \int xf(x)dx$$

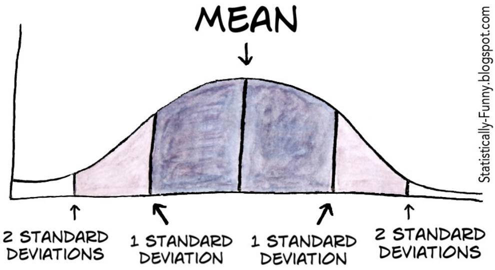
Sean $X_1, X_2, X_3...$ una muestra aleatoria que consiste en n variables aleatorias independientes normalmente distribuidas con medias $E(X_i) = \mu$ y varianza $Var(X_i) = \sigma^2$.

Entonces la distribución de la media muestral $\bar{X}$,

$$\bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + X_3 + ...X_n}{n}$$

es normal con:

- Media μ
- Varianza $\frac{\sigma^2}{n}$
- Desviación estandar $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$


MEAN
2 STANDARD DEVIATIONS
1 STANDARD DEVIATION
1 STANDARD DEVIATION
2 STANDARD DEVIATIONS
Statistically-Funny.blogspot.com

Teorema del límite central

Sean $X_1, X_2, X_3...$ n variables aleatorias *IID* con una distribución de probabilidad no especificada y que tienen una media μ y una varianza σ^2 finita. El promedio muestral

$$\bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + X_3 + ...X_n}{n}$$

tiene una distribución con media μ y varianza $\frac{\sigma^2}{n}$ que tiende hacia una distribución normal conforme n tiende a ∞.

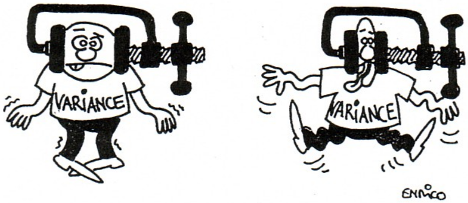


Figure: http://duckdown.blogspot.com.co/2007/04/

Definición

La varianza es la suma del cuadrado de las diferencias entre las mediciones y su media, dividida entre n.

V.A. discreta

$$Var(X) = \frac{1}{n}\sum_{i}^{n}(x_i - E(X))^2$$

V.A. continua

$$Var(X) = \int f(x)(x_i - E(X))^2 dx$$

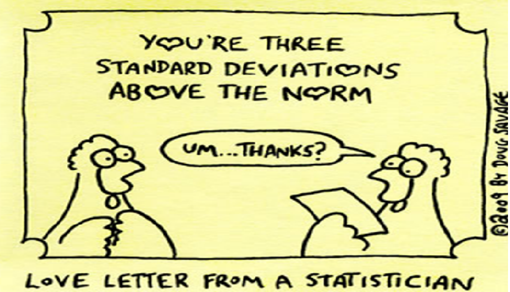


Figure: https://media-exp2.licdn.com/

Definición

La desviación estandar de una muestra de mediciones es la raiz cuadrada positiva de la varianza.

V.A. discreta

$$SD(X) = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i}^{n}(x_i - E(X))^2}$$

V.A. continua

$$SD(X) = \sqrt{\int f(x)(x_i - E(X))^2 dx}$$

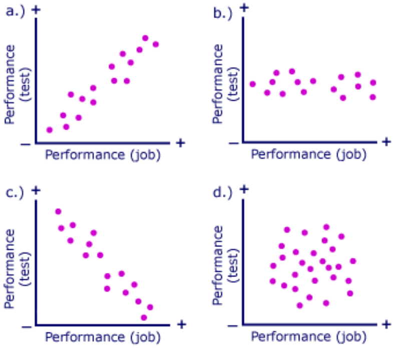


Figure: http://ci.columbia.edu

"La covarianza es una medida de asociación entre los valores de X y de Y y sus respectivas dispersiones. Si, por ejemplo, se tiene una alta probabilidad de que valores grandes de X se encuentren asociados con valores grandes de Y, la covarianza será positiva. Por otro lado, si existe una alta probabilidad de que valores grandes de X se encuentren asociados con valores pequeños de Y o viceversa, la covarizana será negativa" (Canavos, G. 1988).

$$Cov(X,Y) = \frac{1}{n}\sum_{i}^{n}(x_i - E(X))(y_i - E(Y))$$

"En esencia, para la estimación del intervalo se consideran, tanto el estimador puntual del parametro θ, como su distribución de muestreo, con el propósito de determinar un intervalo que, con cierta seguridad, contiene a θ".

Interpretación del intervalo de confianza

"Dado que $\bar{X}$ es una variable aleatoria, el intervalo $(\bar{X} - d)$ a $(\bar{X} + d)$ es un intervalo aleatorio, y la probabilidad de que este intervalo contenga el verdadero valor de μ es de $1 - \alpha$. En otras palabras, si se obtuviesen muestras del mismo tamaño en forma repetida de una población, y cada vez que éstas se selección, se calculan los valores específicos para el intervalo aleatorio $(\bar{X} - d)$ a $(\bar{X} + d)$; entonces debe esperarse que un $(1 - \alpha)$ de estos intervalos contengan el valor de la media desconocida μ".

Intervalo de confianza bilateral

$$P(x_1 < \mu < x_2) = 1 - \alpha$$

Intervalos de confianza unilaterales

$$P(x_1 < \mu) = 1 - \alpha$$

$$P(\mu < x_2) = 1 - \alpha$$

Fórmula

$$P(\bar{X} - Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X} + Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}) = 1 - \alpha$$

Ejemplo

"Ejemplo 8.9. Los datos que a continuación se dan son los presos en gramos del contenido de 16 cajas de cereal que se seleccionarion d eun proceso de llenado con el propósito de verificar el peso promedio: 506, 508, 499, 503, 504, 510, 497, 512, 514, 505, 493, 496, 506, 509 y 496. Si el peso de cada caja es una variable aleatoria normal con desviación estadnar $\sigma = 5$ *gramos*,obtener los intervalos de confianza estimados del 90, 95 y 99 por ciento, para la media de deeste proceso".

TABLA 8.1 Intervalos de confianza para el ejemplo 8.9

Confianza	$z_{1-\alpha/2}$	*Límite inferior*	*Límite superior*
90%	1.645	501.69	505.81
95%	1.96	501.30	506.20
99%	2.575	500.53	506.97

Fórmula

$$P(\bar{X} - t_{1-\frac{\alpha}{2},n-1}\frac{s}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X} + t_{1-\frac{\alpha}{2},n-1}\frac{s}{\sqrt{n}}) = 1 - \alpha$$

Ejemplo

Calcule los intervalos de confianza para el ejercicio anteriormente expuesto, pero en este caso también debe estimar la varianza de $\bar{X}$.

TABLA 8.2 Intervalos de confianza para el ejemplo 8.9

Confianza	$t_{1-\alpha/2,\, n-1}$	*Límite inferior*	*Límite superior*
90%	1.753	501.03	506.47
95%	2.131	500.45	507.05
99%	2.947	499.18	508.32

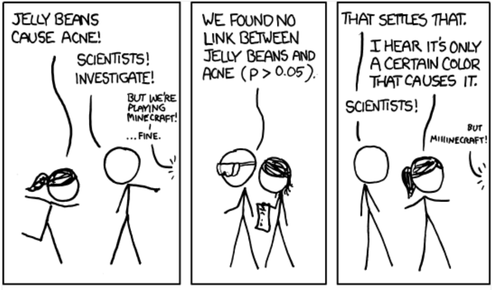


Figure: https://twitter.com/datarobot

"Una hipótesis estadística es una afirmación con respecto a alguna característica desconocida de una población de interés.La esencia de probar una hipótesis estadística es el decidir si la afirmación se encuentra apoyada por la evidencia experimental que se obtiene a través de una muestra aleatoria"(Canavos, G. Probabilidad y Estadística. Pág. 305).

"En nuestro contexto, el científico plantea una hipótesis respecto a uno o más parámetros poblaciones: de que son iguales a valores especificados. Enseguida toma una muestra de la población y compara sus observaciones con la hipótesis. Si las observaciones no concuerdan con la hipótesis, las rechaza". (Wackerly. Estadística Matemática con Aplicaciones, pág. 489)

- Hipótesis nula, H_o
- Hipótesis alternativa, H_a
- Estadístico de prueba: "es una función de las mediciones muestrales en las que la decisión estadística estará basada". (Wackerly. Estadística Matemática con Aplicaciones, pág. 490)
- Región de rechazo: "especifica los valores del estadístico de prueba para el cual la hipótesis nula ha de ser rechazada a favor de la hipótesis alternativa". (Wackerly. Estadística Matemática con Aplicaciones, pág. 490)

- Hipótesis simple: es aquella donde se específica de manera única la distribución de la población de la cual se toma la muestra.
- Hipótesis compuesta: es aquella donde no se especifica de manera única la distribución de la población de la cual se toma la muestra.

- Se comete un error tipo I si H_o es rechazada cuando H_o es verdadera. La probabilidad de un error de tipo I está denotada por α. El valor de α se conoce como el nivel de significancia estadístico.
- Se comete un error de tipo II si H_o es aceptada cuando H_a es verdadera. La probabilidad de un error de tipo II está denotada por β.

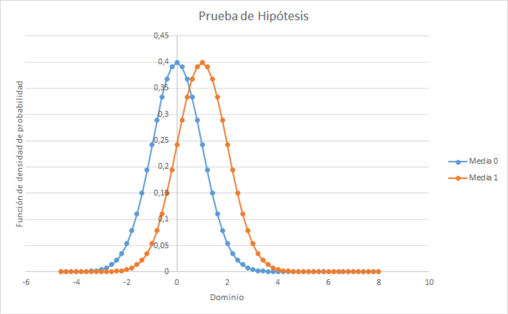


Figure: Elaboración propia

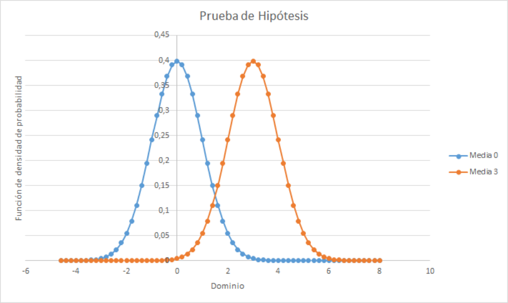


Figure: Elaboración propia

- Prueba unilateral: cuando los valores de la hipótesis alterna se encuentra únicamente a un lado, superior o inferior, de la distribución de probabilidad de la hipótesis nula.
- Ejemplo: $H_a : \theta > \theta_o$
- Ejemplo: $H_a : \theta < \theta_o$

- Prueba bilateral: cuando los valores de la hipótesis alterna se encuentran a ambos lados de la distribución de probabilidad de la hipótesis nula.
- Ejemplo: $H_a : \theta \neq \theta_o$

Distribución normal

TABLA 9.5 Criterios de rechazo para la prueba de hipótesis con respecto a la media de una distribución normal con varianza conocida

Hipótesis nula	*Valor de la estadística de prueba bajo H_0*
$H_0: \mu = \mu_0$	$z = \dfrac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$
Hipótesis alternativa	*Criterios de rechazo*
$H_1: \mu \neq \mu_0$	Rechazar H_0 cuando $z \leq z_{\alpha/2}$ o cuando $z \geq z_{1-\alpha/2}$
$H_1: \mu > \mu_0$	Rechazar H_0 cuando $z \geq z_{1-\alpha}$
$H_1: \mu < \mu_0$	Rechazar H_0 cuando $z \leq z_{\alpha}$

Figure: Canavos. Probabilidad y Estadística. Pág. 329

Distribución t de student

TABLA 9.7 Criterios de rechazo para probar hipótesis con respecto a la media de una distribución normal con varianza desconocida

Hipótesis nula	*Valor de la estadística de prueba bajo H_0*
H_0: $\mu = \mu_0$	$t = \dfrac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}}$
Hipótesis alternativa	*Criterios de rechazo*
H_1: $\mu \neq \mu_0$	Rechazar H_0 cuando $t \leq t_{\alpha/2,n-1}$ o cuando $t \geq t_{1-\alpha/2,n-1}$
H_1: $\mu > \mu_0$	Rechazar H_0 cuando $t \geq t_{1-\alpha,n-1}$
H_1: $\mu < \mu_0$	Rechazar H_0 cuando $t \leq t_{\alpha,n-1}$

Figure: Canavos. Probabilidad y Estadística. Pág. 331

El estimador de Mínimos Cuadrados Ordinarios (siendo una función de las mediciones muestrales) busca encontrar el impacto que tiene la variable independiente sobre la dependiente en la población. Teniendo en cuenta que el impacto lo estoy evaluando a partir de una muestra, puedo afirmar que el b estimado es una variable aleatoria, y quiero conocer qué tan probable es que dicho resultado para el b estimado provenga de una distribución con una media específica(H_o).

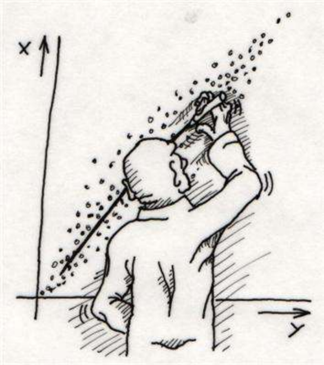


Figure: http://www.pitt.edu

"La regresión múltiple es un método estadístico para cuantificar las relaciones económicas y contrastar hipótesis sobre ellas.

En una regresión lineal, las relaciones son de la siguiente forma:

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + ... + \beta_k x_{ki} + e_i$$

La ecuación relaciona una variable dependiente Y con varias variables independientes (o explicativas), X_1, X_2,... Por ejemplo, en una ecuación con dos variables independientes, Y podría ser la demanda de un bien, X_1 su precio y X_2 la renta. La ecuación también contiene un término de error e que también puede afectar a Y (Por ejemplo, los precios de otros bienes, el tiempo meteorológico, los cambios inexplicables de los gustos de los consumidores, etc.)" (Pindyck y Rubinfeld (2009)),

Regresión simple

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{1i} + e_i$$

Estimador intercepto

$$\hat{\beta}_o = \bar{Y} - \beta_1 \bar{X}$$

Estimador pendiente

$$\hat{\beta}_1 = \frac{Cov(X,Y)}{Var(X)} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - E(X))(y_i - E(Y))}{\sum_{i=1}^{n}(x_1 - E(X))^2}$$

Regresión simple

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + e_i$$

Estimador intercepto

$$\hat{\beta}_o = \bar{Y} - \beta_1 \bar{X}_1 - \beta_2 \bar{X}_2$$

Estimador pendiente 1

$$\hat{\beta}_1 = \frac{Cov(X_1, Y)Var(X_2) - Cov(X_2, Y)Cov(X_1, X_2)}{Var(X_1)Var(X_2) - Cov(X_1, X_2)^2}$$

La insesgadez hace referencia a la posibilidad de que el valor del β *estimado* sea igual o cercano al β *poblacional* o real. Se podrá decir que el β *estimado* es insesgado si se cumplen las cuatro condiciones que se mencionarán a continuación, estas son:

- Linealidad en parámetros
- Muestreo aleatorio
- Variación muestral en las variables explicativas
- Media condicional del error independiente de las variables explicativas

"[E]l término regresión "lineal" siempre significará una regresión lineal en los parámetros; los β se elevan sólo a la primera potencia. Puede o no ser lineal en las variables explicativas X"(Gujarati, D. Porter, Dawn. (2009)Pág. 38). A continuación algunos modelos de regresión lineal en los β:

- $Y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + e_i$
- $Y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i^2 + e_i$
- $Y_i = \beta_0 + \beta_1^2 x_i + e_i$

La linealidad también implica que por cada aumento de una unidad en x el valor esperado de y se modifica en β_1.

Si las variables aleatorias $X_1, X_2, ..., X_n$ tienen la misma función (densidad) de probabilidad que la de la distribución de la población y su función (distribución) conjunta de probabilidad es igual al producto de los marginales, entonces $X_1, X_2, ..., X_n$ forman un cojunto de n variables aleatorias independiente e identicamente distribuidas que constituyen una muestra aleatoria de la población".(Canavos, G.(1988) Pág. 217)

No todos los valores muestrales de x, a saber $x_i, i = 1, 2, 3, ..., n$, son iguales, es decir, no todos tienen el mismo valor.

"La ecuación indica que el valor promedio de los factores no observables es el mismo en todas las fracciones de la población determinados por los valores de x y que este promedio común es necesariamente igual al promedio de u en toda la población. Cuando se satisface el supuesto se dice que u es independiente de x".

$$E(u|x) = E(u)$$

"Para simplificar el análisis, supóngase que u es capacidad innata. Entonces la ecuación requiere que el promedio de la capacidad sea el mismo sin importar los años de educación escolar. Por ejemplo, las capacidades promedio en el grupo de personas con ocho años de educación escolar y las capacidades promedio entre todas las personas con 16 años de educación escolar deben ser iguales. En efecto, el promedio de capacidad debe ser el mismo en todos los niveles de educación. Si, por ejemplo, se piensa que la capacidad promedio aumenta con los años de educación, entonces la ecuación es falsa".(Wooldridge, J. (2010) pág.25)

"Pero si X y u están correlacionadas, no es posible evaluar los efectos de cada una sobre Y. Así, si X y u tienen correlación positiva, X aumenta cuando u aumenta, y disminuye cuando u disminuye. Asimismo, si X y u tienen correlación negativa, X se incrementa cuando u se reduce, y disminuye cuando u aumenta."(Gujarati, D. Porter, Dawn. (2009) Pág. 64)

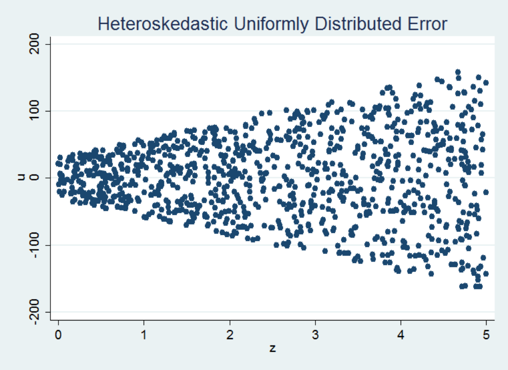


Figure: http://www.econometricsbysimulation.com

El estimador de Mínimos Cuadrados Ordinarios (siendo una función de las mediciones muestrales) busca encontrar el impacto que tiene la variable independiente sobre la dependiente en la población. Teniendo en cuenta que el impacto se está evaluando a partir de una muestra, puedo afirmar que el b estimado es una variable aleatoria, y quiero conocer qué tan probable es que dicho resultado para el b estimado provenga de una distribución donde la variable explicativa no tiene un efecto sobre la variable de resultado (H_o) o de otra distribución con una media diferente de cero.

El supuesto de homocedasticidad establece que la varianza de los factores inobservables, u, condicionales en x, es constante.

$$E(y|x) = B_o + B_1 x$$

$$Var(u|x) = \sigma^2$$

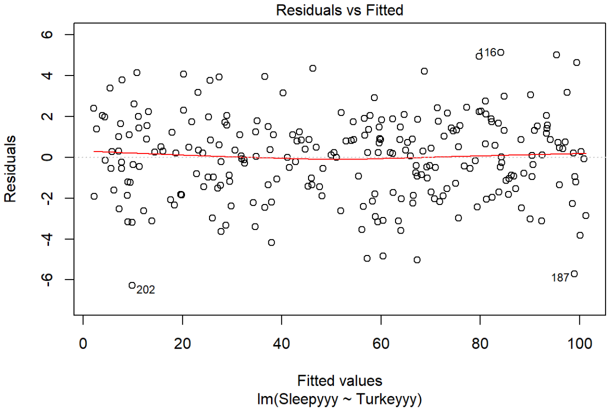


Figure: https://ademos.people.uic.edu/Chapter12.html

Estimación de la varianza de β

$$Var(\hat{\beta}_j) = \frac{\sigma^2}{STC_j(1 - R_j^2)}$$

- σ^2 denota la varianza del error
- STC_j denota la variación muestral total para la variable x_j
- R_j^2 denota es la porción de la variación muestral de x_j explicada por las otras variables independientes, incluyendo un intercepto.

STC o suma total de cuadrados

La suma total de cuadrados hace referencia a la variación muestral en una variable, generalmente la variable de resultado.

$$STC = \sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2$$

SEC o suma explicada de cuadrados

La suma explicada de cuadrados hace referencia a la variación muestral de la variable explicativa.

$$SEC = \sum_{i=1}^{n} (\hat{y}_i - \bar{y})^2$$

SRC o suma de residuales cuadrados

La suma de residuales cuadrados hace referencia a la variación muestral del error estimado.

$$SRC = \sum_{i=1}^{n} (\hat{u}_i)^2$$

R Cuadrados

El R cuadrado hace referencia a la proporción de la variación muestral de la variable de resultado que es explicada por la linea de regresión de MCO.

$$STC = SEC + SRC$$
$$\frac{SRC}{STC} + \frac{SEC}{STC} = \frac{STC}{STC}$$
$$R^2 = \frac{SEC}{STC} = 1 - \frac{SRC}{STC}$$

Análisis varianza de β

- "Una σ^2 más grande significa varianzas más grandes para los estimadores de MCO. Esto no es nada sorprendente: más "ruido" en la ecuación dificulta más estimar el efecto parcial de cualquier variable independiente sobre y, y esto se refleja en varianzas más grandes para los estimadores de pendiente de MCO"
- "Cuanto mayor sea la variación total en x_j, menor será $Var(\hat{\beta}_j)$. [...] Aunque es difícil que se puedan elegir los valores muestrales de las variables independientes, hay una manera de aumentar la variación muestra en cada una de las variables independientes: aumentar el tamaño de la muestra".

Error estimado $\hat{u}$

$$\hat{u} = y_i - \{\hat{\beta}_o + \hat{\beta}_1 x_{i1} + \hat{\beta}_2 x_{i2} + \hat{\beta}_3 x_{i3} + ... + \hat{\beta}_k x_{ik}\}$$

Estimador insesgado de la varianza del error

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} \hat{u}^2}{(n-k-1)}$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}\{y_i - \hat{\beta}_o - \hat{\beta}_1 x_{i1} - \hat{\beta}_2 x_{i2} - ... - \hat{\beta}_k x_{ik}\}^2}{(n-k-1)}$$

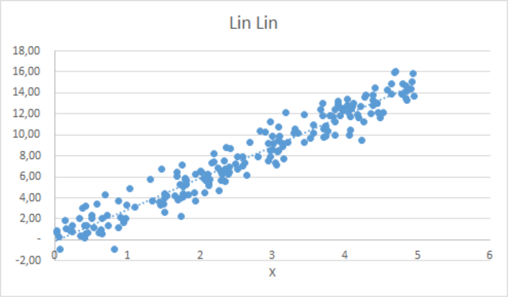


Figure: Elaboración propia

Lin Lin

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{1i} + e_i$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d\beta_0}{dx} + \frac{d\beta_1 x_{1i}}{dx} \frac{de_i}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = 0 + \beta_1 \frac{dx_{1i}}{dx} + 0$$

$$\frac{dy}{dx} = \beta_1$$

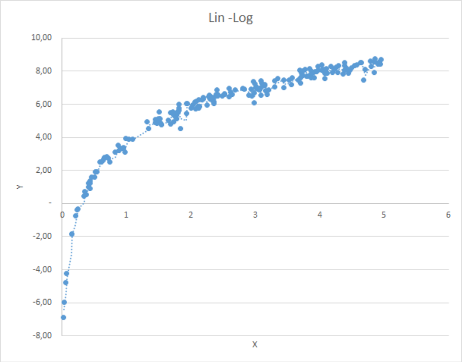


Figure: Elaboración propia

Lin Log

$$e^{Y_i} = e^{\beta_0} x_{1i}^{\beta_1} e^{u_i}$$

$$Y_i \log e = \beta_0 \log e + \beta_1 \log x_{1i} + u_i \log e_i$$

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 \log x_{1i} + u_i$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d\beta_0}{dx} + \frac{\beta_1 \log x_{1i}}{dx} + \frac{du_i}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = 0 + \frac{\beta_1 \log x_{1i}}{dx} + 0$$

$$\frac{dy}{dx} = \beta_1 \frac{1}{x}$$

$$dy = \beta_1 \frac{dx}{x}$$

$$dy = \frac{\beta_1}{100} \frac{dx}{x} * 100$$

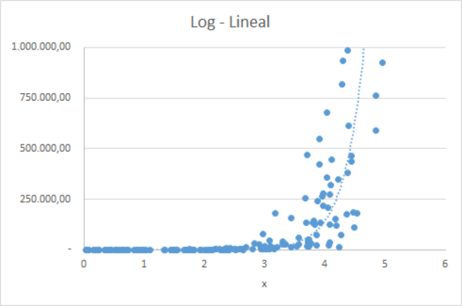


Figure: Elaboración propia

Log Lin

$$Y_i = e^{\beta_0}(1+r)^{x_{1i}} e^{u_i}$$

$$\log Y_i = \beta_0 \log e + x_{1i} \log(1+r) + u_i \log e_i$$

$$\log Y_i = \beta_0 + x_{1i}\beta_1 + u_i$$

$$\frac{d \log Y_i}{dx} = \frac{d\beta_0}{dx} + \frac{\beta_1 x_{1i}}{dx} + \frac{du_i}{dx}$$

$$\frac{d \log y}{dx} = 0 + \frac{\beta_1 x_{1i}}{dx} + 0$$

$$\frac{d \log y}{dx} = \beta_1$$

$$d \log y = \beta_1 dx$$

$$100 * d \log y = 100\beta_1 dx$$

- Lineal lineal: un cambio en una unidad en x genera, en promedio, un cambio en y igual a β_1.
- Log lineal: un cambio en una unidad en x genera, en promedio, un cambio porcentual en y igual a $100 * \beta_1$.
- Lineal Log: un cambio en un 1 por ciento en x genera, en promedio, en cambio en y igual a $\frac{\beta_1}{100}$.